Espace vectoriel euclidien

I Définition et notations

Un espace vectoriel euclidien $\underset{\text{déf}}{=}$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension $n \geq 2$, le produit scalaire est noté φ. Pour $x, y \in E$, on note aussi :

- $x \cdot y$ pour $\varphi(x, y)$ (parfois on rencontre aussi $(x \mid y)$)
- x^2 pour $\varphi(x, x)$
- $\|x\|$ pour $\sqrt{\varphi(x, x)}$ (ainsi, $x \mapsto \|x\|$ est la norme associée au produit scalaire φ, on l'appelle la norme euclidienne)
- $x \perp y$ pour $\varphi(x, y) = 0$

Exemple : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique : on parle de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est muni naturellement d'une structure euclidienne, obtenue par restriction.

II Bases orthonormales

A) Généralités

Définition, proposition :

Une base orthonormale (ou orthonormée) $\underset{\text{déf}}{=}$ une famille orthonormale de vecteurs de E qui en forme une base = une famille orthonormale de n vecteurs de E (car une famille orthonormale est libre.

Théorème (Schmidt) :

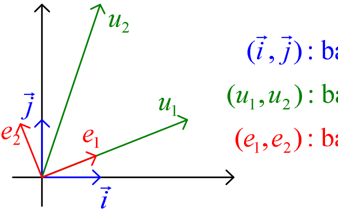
Soit $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ une base quelconque de E.

Alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ telle que :

- $\forall p \in [\![1, n]\!], \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots e_p) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots u_p)$
- $\forall p \in [\![1, n]\!], e_p \cdot u_p > 0$

On dit que $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ est la base orthonormale s'appuyant sur la base $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Préliminaire (graphique) :



$(\vec{i}, \vec{j})$: base orthonormée

(u_1, u_2) : base quelconque

(e_1, e_2) : base orthonormée qui s'appuie dessus

Démonstration :

On montre par récurrence sur p que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, « on a une et une seule manière de construire e_p ».

- Il est évident qu'il y a une seule façon de construire e_1 de sorte que :

- $\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Vect}(u_1)$ (cela impose que $e_1 = \lambda u_1$, avec $\lambda \neq 0$ car $e_1 \neq 0, u_1 \neq 0$)
- $\|e_1\| = 1$ (cela impose alors que $|\lambda| \|u_1\| = 1$, ainsi $e_1 = \pm |\lambda| u_1$)
- $e_1 \cdot u_1 > 0$, donc $e_1 = +|\lambda| u_1$.

Ainsi, $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Réciproquement, ce vecteur convient bien

- Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $(e_1, e_2, ... e_p)$ construit.

Montrons qu'il y a un et un seul choix de sorte que :

• $\text{Vect}(e_1, e_2, ... e_{p+1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, ... u_{p+1})$ (1)

• e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1 \leq i \leq p$ (2)

• $\|e_{p+1}\| = 1$ (3)

• $e_{p+1} \cdot u_{p+1} > 0$ (4)

(1) impose que e_{p+1} soit combinaison linéaire des $u_i, 1 \leq i \leq p+1$

$$= \lambda u_{p+1} + \underbrace{\text{combinaison linéaire des } u_i, 1 \leq i \leq p}_{\text{combinaison linéaire des } e_i, 1 \leq i \leq p}$$

et $\lambda \neq 0$ car sinon $\text{Vect}(e_1, e_2, ... e_{p+1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, ... u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, ... u_{p+1})$ et u_{p+1} serait alors combinaison linéaire des $u_i, 1 \leq i \leq p$.

Donc $e_{p+1} = \lambda \left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \right)$.

Et inversement, si $e_{p+1} = \lambda \left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \right)$, alors on a bien (1).

(2) impose que pour $j \in [\![1, p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = 0$.

Or, pour $j \in [\![1, p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = \lambda \left(u_{p+1} \cdot e_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_j \right) = \lambda (u_{p+1}.e_j + \alpha_j)$ car on a $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$, 1 sinon, par hypothèse de récurrence.

Ainsi, $\forall j \in [\![1, n]\!], \alpha_j = -u_{p+1} \cdot e_j$

Inversement, si cette condition est vérifiée, on a bien (2).

(3) impose que $\|e_{p+1}\| = 1$, c'est-à-dire que $1 = |\lambda| \left\| u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \right\|$.

Donc $\lambda = \pm \dfrac{1}{\left\| u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \right\|}$

($u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \neq 0$ car sinon $u_{p+1} \in \text{Vect}(e_1, e_2, ... e_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, ... u_p)$)

Inversement, si on a cette valeur de λ, on a bien (3).

(4) impose le choix de +, car $e_{p+1} \cdot e_{p+1} = \lambda \left(u_{p+1} \cdot e_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_{p+1} \right)$.

Or, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_{p+1} = 0$ car e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1 \leq i \leq p$.

Donc $\underbrace{e_{p+1} \cdot e_{p+1}}_{=1} = \lambda \underbrace{u_{p+1} \cdot e_{p+1}}_{>0}$ donc $\lambda > 0$.

Inversement, si $\lambda > 0$, on a bien (4).

Ce qui achève la récurrence.

Conséquences :

(1) Dans un espace vectoriel euclidien, il existe au moins une base orthonormale

(2) Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

En effet :

Soit $(e_1, e_2, ... e_p)$ une famille orthonormale. Comme elle est libre, on peut la compléter en une base $(e_1, e_2, ... e_p, e_{p+1}, ... e_n)$ de *E*. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on obtient alors une base orthonormale $(e'_1, e'_2, ... e'_n)$. Mais, d'après le théorème de Schmidt appliqué dans $F = \text{Vect}(e_1, e_2, ... e_n)$, on a $(e_1, ... e_p) = (e'_1, ... e'_p)$.

B) Produit scalaire et base orthonormale

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ... e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $x \in E$, de composantes $(x_1, x_2, ... x_n)$ dans B, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Soit $y \in E$, de composantes $(y_1, y_2, ... y_n)$ dans B, notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On identifie ici $\mathbb{R}$ et $M_{1,1}(\mathbb{R})$ pour ne pas charger les notations :

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i e_i \cdot y_j e_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1 \ \ x_2 \ \ \cdots \ \ x_n) \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = ({}^t X) Y$$

Ainsi, $\boxed{x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = ({}^t X) Y}$.

Et, en particulier : $\boxed{x^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ({}^t X) X}$

Ainsi, l'application $\phi_{\mathcal{B}} : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to E \\ (x_1, x_2, ... x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$, qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev, est aussi un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev euclidien *, $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique. (* C'est-à-dire que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n, \phi_{\mathcal{B}}(u) \cdot \phi_{\mathcal{B}}(v) = u \cdot v$, en plus des règles pour un $\mathbb{R}$-ev).

Remarque :

Inversement, soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ... u_n)$ une base de E.

Alors il existe un et un seul produit scalaire tel que B soit orthonormale dans le $\mathbb{R}$-ev euclidien E muni de ce produit scalaire.

En effet, c'est l'application φ définie par :

Pour tout $x, y \in E$, de composantes $(x_1, x_2, ... x_n)$ et $(y_1, y_2, ... y_n)$ dans B,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Exemple :

$\mathbb{R}^2$, muni de la base $[\underbrace{(1,2)}_{u_1}, \underbrace{(1,1)}_{u_2}]$. On note $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $x = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} = x_1(2u_2 - u_1) + x_2(u_1 - u_2) = (x_2 - x_1)u_1 + (2x_1 - x_2)u_2$.

Ainsi, $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire naturel, mais (u_1, u_2) n'en est pas une pour ce produit scalaire ; en revanche, c'en est une pour le produit scalaire φ : $\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) \mapsto (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2) \\ 2x_2 y_2 + 5x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 \end{array}$.

III Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projecteurs et symétries orthogonaux

A) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel (rappel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On définit $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \cdot y = 0\}$.

Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, et $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration :

Déjà, c'est un sous-espace vectoriel de E (vu dans le chapitre précédent).

- Si $F = \{0\}$, alors $F^\perp = E$, et on a bien $E = F \oplus F^\perp$.
- Si $F \neq \{0\}$. On note p la dimension de F ; ainsi, $1 \leq p \leq n$.

Soit $(e_1, e_2, \dots e_p)$ une base orthonormale de F.

On la complète en une base orthonormale $\mathrm{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ de E. Soit alors $x \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans B.

On a alors les équivalences :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \cdot y = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y_1, y_2, \dots y_p \in \mathrm{R}, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} y_i e_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!], \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \cdot e_j = 0 \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!], x_j = 0$$

L'avant-dernière équivalence se justifie dans un sens en prenant, pour $j \in [\![1, p]\!]$ $y_j = 1$ et $\forall i \in [\![1, p]\!] \setminus \{j\}, y_i = 0$, et dans l'autre sens par linéarité de la deuxième variable.

Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots e_n)$, donc $F^\perp$ est bien supplémentaire de F dans E.

Conséquence :

Dans un espace euclidien, $(F^\perp)^\perp = F$.

En effet, on a déjà vu que $F \subset (F^\perp)^\perp$. De plus, en notant $p = \dim F$, on a :

$\dim(F^\perp) = n - p$, donc $\dim((F^\perp)^\perp) = n - (n - p) = p = \dim F$. D'où l'égalité.

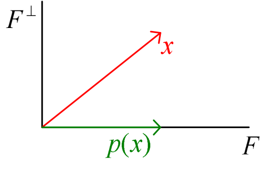
B) Projecteur orthogonal

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Le projecteur orthogonal sur F $\underset{\text{déf}}{=}$ le projecteur sur F selon $F^\perp$.

Pour $x \in E$, p le projecteur orthogonal sur F, alors $p(x)$ est appelée la projection orthogonale de x sur F.



Ainsi, $p(x)$ est l'unique élément de F tel que x s'écrive :

$x = p(x) + u$, où $u \in F^\perp$. (car $E = F \oplus F^\perp$, et $x \in E, p(x) \in F$)

Autrement dit, $p(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p(x) \in F^\perp$. Ainsi, pour $y \in E$, $y = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$.

C) Distance d'un élément à un sous-espace vectoriel

Définition :

Soit A une partie non vide E et soit $x \in E$. Alors la distance de x à A, notée $d(x, A)$, est : $d(x, A) \underset{\text{déf}}{=} \inf_{y \in A} d(x, y)$.

La borne inférieure existe bien, car $\{d(x, y), y \in A\}$ est non vide (car A est non vide), et minorée (par 0).

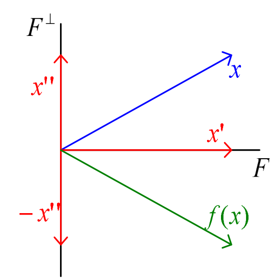
(Définition : frontière = adhérence d'une partie, privée de l'intérieur)

Théorème :
Soit F un sous-espace vectoriel de E, soit p le projecteur orthogonal sur F.
Soit $x_0 \in E$.
Alors $p(x_0)$ est l'unique élément de F tel que $d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$. Autrement dit, la distance de x_0 est atteinte, en un et un seul point, qui n'est autre que $p(x_0)$.

Démonstration :
Soit $y \in F$.
Alors $\|y - x_0\|^2 = \|y - p(x_0) + p(x_0) - x_0\|^2$.
Or, $y - p(x_0) \in F$ car $y \in F, p(x_0) \in F$; et $p(x_0) - x_0 \in F^{\perp}$ par définition de p.
Donc $y - p(x_0) \perp p(x_0) - x_0$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :
$\|y - x_0\|^2 = \|y - p(x_0) + p(x_0) - x_0\|^2 = \|y - p(x_0)\|^2 + \|p(x_0) - x_0\|^2$
D'où $\|y - x_0\| \geq \|p(x_0) - x_0\|$, et il n'y a égalité que si $y = p(x_0)$ (car sinon $\|y - x_0\|^2 - \|p(x_0) - x_0\|^2 = \|y - p(x_0)\|^2 \neq 0$)

D) Symétries orthogonales

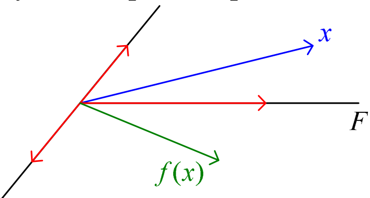
Ce sont les symétries par rapport à un sous-espace vectoriel F, selon $F^{\perp}$.
Autrement dit :
La symétrie orthogonale par rapport à $F \underset{\text{déf}}{=}$ l'application $f : \begin{array}{l} E = F \oplus F^{\perp} \to E \\ x = x' + x'' \mapsto x' - x'' \end{array}$.



Remarque : $f(x) = 2p(x) - x$, où p est la projection orthogonale sur F.

Proposition :
Soit f une symétrie sur E. On a l'équivalence :
f est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow \forall x \in \|f(x)\| = \|x\|$.

Symétrie quelconque :



Démonstration :
Soit f une symétrie par rapport à F selon G. (où G est tel que $E = F \oplus G$).
Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$, et $f(x) = x_F - x_G$.

Donc $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$ et $\|f(x)\|^2 = \|x_F\|^2 - 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$.

Ainsi :

- Si $G = F^{\perp}$, alors $x_F \cdot x_G$ vaudra toujours 0. Donc $\forall x \in \|f(x)\| = \|x\|$
- Si $G \neq F^{\perp}$, on peut trouver $x' \in F, x'' \in G$ tel que $x' \cdot x'' \neq 0$. Alors, en prenant $x = x' + x''$ $(\in E)$, on aura trouvé x tel que $\|f(x)\| \neq \|x\|$. D'où l'équivalence.

IV Formes linéaires et hyperplans

A) Formes linéaires

Théorème :

Les formes linéaires sur E sont exactement les applications du type : $\underset{x \mapsto a\cdot x}{E \to \mathbb{R}}$, où $a \in \mathbb{R}$. Plus précisément :

(1) Les applications du type $x \mapsto a \cdot x$ sont linéaires, et

(2) Si $h \in E^*$, alors il existe un et un seul élément a de E tel que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$. (on retrouve ainsi le fait que $\dim(E^*) = \dim(E)$)

Démonstration :

Le premier point résulte de la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable. Pour le deuxième :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $h \in E^*$.

Il existe alors $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$ de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans B, $h(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a \cdot x$, avec $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ (on introduit en fait $(a_1\ a_2 \dots a_n)$, matrice de h dans les bases B et (1)). D'où l'existence.

Unicité :

Si il existe $a, a' \in E$ tels que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$ et $h(x) = a' \cdot x$, alors $\forall x \in E, (a - a') \cdot x = 0$ (linéarité par rapport à la première variable).

Donc $a - a' \in E^{\perp} = \{0\}$, d'où $a = a'$.

B) Hyperplans

Soit H un hyperplan de E. Alors H est le noyau d'une forme linéaire sur E, h, non nulle (attention, il n'y a pas unicité !).

Or, il existe $\vec{n} \in E$ tel que $\forall x \in E, h(x) = \vec{n} \cdot x$.

Ainsi, $H = \ker h = \{x \in E, h(x) = 0\} = \{x \in E, \vec{n} \cdot x = 0\} = [\mathrm{Vect}(\vec{n})]^{\perp}$.

Donc $\vec{n}$ dirige la droite vectorielle $N = H^{\perp}$. On dit que N est la normale à H : $N = H^{\perp}$, ou encore $N^{\perp} = H$, et que $\vec{n}$ est un vecteur normal à H.

Remarque :

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base orthonormale de E,

Si H a pour équation $H : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ dans B, alors le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dans B est normal à H. En effet, l'équation "dit" : $x \in H \Leftrightarrow \vec{n} \cdot x = 0$.

C) Projection orthogonale sur un hyperplan

On considère un hyperplan H, un vecteur $\vec{n}$ normal à H et p le projecteur orthogonal sur H.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x'}_{\in H} + \underbrace{x''}_{\in H^\perp}$, et $\begin{cases} x' = p(x) \\ x'' = \lambda\vec{n}, \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Donc $\boxed{x = p(x) + \lambda.\vec{n}}$

Ainsi, $x \cdot \vec{n} = \underbrace{p(x) \cdot \vec{n}}_{=0 \text{ car } p(x) \in H} + \lambda\|\vec{n}\|^2$

D'où $\lambda = \dfrac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$, et, par conséquent :

$p(x) = x - x'' = x - \lambda.\vec{n}$

Soit $\boxed{p(x) = x - \left(\dfrac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right).\vec{n}}$

Conséquence :

Pour tout $x \in E$, $\boxed{d(x,H) = \|x - p(x)\| = \dfrac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \dfrac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$.

D) Réflexion

Une réflexion $\underset{\text{déf}}{=}$ une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition :

Etant donnés deux vecteurs x, x' de E, distincts et de même norme, il existe une et une seule réflexion qui les échange.

Démonstration :

Existence :

Soit H l'hyperplan tel qu'un vecteur normal soit $x - x'$, et soit f la réflexion d'hyperplan H. On note enfin p la projection orthogonale sur H.

$$\text{Alors } f(x) = 2p(x) - x = 2\left(x - \frac{x \cdot (x - x')}{\|x - x'\|^2}(x - x')\right) - x$$

$$= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{\|x\|^2 - 2x \cdot x' + \|x'\|^2}(x - x') - x$$

$$= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{2\|x\|^2 - 2x \cdot x'}(x - x') - x$$

$$= -(x - x') - x = x'$$

Et, de même, $f(x') = x$.

Unicité :

Supposons qu'il existe deux réflexions f, g d'hyperplans F, G telles que :

$f(x) = x' ; f(x') = x \quad ; \quad g(x) = x' ; g(x') = x$

On a alors :

Déjà, $x - x'$ est normal à F. En effet :

Pour tout $y \in F$, on a déjà :

$$\|f(x - y)\| = \|x - y\|$$
$$= \|f(x) - f(y)\| = \|x' - y\|$$

D'où $\|x - y\| = \|x' - y\|$.

De plus, pour tout $y \in F$:

$$(x-x')\cdot y = x'\cdot y - x\cdot y = \tfrac{1}{2}\left(\|x'\|^2+\|y\|^2-\|x'-y\|^2\right)-\tfrac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$
$$= 0 \text{ car } \|x'\|=\|x\| \text{ et } \|x'-y\|=\|x-y\|$$

Donc $F^{\perp}=\mathrm{Vect}(x-x')$.

De même, $G^{\perp}=\mathrm{Vect}(x-x')$

Donc $F^{\perp}=G^{\perp}$, d'où $F=G$.

V Automorphismes orthogonaux

A) Définition, théorème

Soit $f\in L(E)$.

f est un automorphisme orthogonal $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ f "conserve le produit scalaire"(1) :

$\forall x,y\in E, f(x)\cdot f(y)=x\cdot y$

$\Leftrightarrow$ f "conserve la norme"(2) :

$\forall x\in E, \|f(x)\|=\|x\|$

$\Leftrightarrow$ f "conserve les bases orthonormales"(3) :

Pour toute base orthonormale $(e_1,e_2,...e_n)$

$(f(e_1),f(e_2),...f(e_n))$ est orthonormale

$\Leftrightarrow$ f "conserve une base orthonormale"(4) :

Il existe une base orthonormale $(e_1,e_2,...e_n)$

telle que $(f(e_1),f(e_2),...f(e_n))$ est orthonormale

Démonstration :

$(1)\Rightarrow(2)$: évident ; si (1), alors $f(x)^2=x^2$

$(2)\Rightarrow(1)$: supposons (2).

Soient $x,y\in E$. Alors :

$$f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$$
$$=x\cdot y$$

$(1)\Rightarrow(3)$: supposons (1).

Soit $(e_1,e_2,...e_n)$ une base orthonormale.

Alors, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)\cdot f(e_j)=e_i\cdot e_j=\delta_{i;j}$

$(3)\Rightarrow(4)$: il en existe puisque l'ensemble des bases orthonormales n'est pas vide.

$(4)\Rightarrow(1)$: supposons (4).

Soit $\mathsf{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base orthonormale telle que $\mathsf{B}'=(f(e_1),f(e_2),...f(e_n))$ soit aussi orthonormale.

Soient alors $x,y\in E$, de composantes $(x_1,x_2,...x_n)$ et $(y_1,y_2,...y_n)$ dans B.

Alors $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Et $f(x)\cdot f(y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ car B' est aussi orthonormale, et les composantes de $f(x)$ et $f(y)$ dans B' sont $(x_1,x_2,...x_n)$ et $(y_1,y_2,...y_n)$ puisque f est linéaire (rappel : pour une application linéaire, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Rightarrow f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)$)

Remarque :

Si une application f est un automorphisme orthogonal, alors c'est aussi un automorphisme.

En effet : si f est un automorphisme orthogonal, alors :

$f(x)=0 \Rightarrow \|f(x)\|=0 \Rightarrow \|x\|=0 \Rightarrow x=0$. Donc $\ker f=\{0\}$. Donc f est injective, donc bijective (puisque E est de dimension finie)

Définition, proposition :

On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Alors $O(E)$ constitue un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$ des automorphismes de E. On l'appelle le groupe orthogonal de E. Les éléments de $O(E)$ sont aussi appelés des isométries vectorielles.

Démonstration :

- $\mathrm{Id}_E \in O(E)$
- Si $f,g\in O(E)$, alors $f\circ g\in O(E)$ et $f^{-1}\in O(E)$:

$\|(f\circ g)(x)\|=\|f(g(x))\|=\|g(x)\|=\|x\|$, et $\|f^{-1}(x)\|=\|f(f^{-1}(x))\|=\|f^{-1}(x)\|=\|x\|$.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont des éléments de $O(E)$

B) Matrices orthogonales

Théorème :

Soit B une base orthonormale de E. Soit $f\in L(E)$, et $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=\mathrm{mat}(f,\mathrm{B})$.

Alors :

$f\in O(E) \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire naturel $\Leftrightarrow A{}^tA=I_n \Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1}={}^tA$

Démonstration :

$f\in O(E) \Leftrightarrow (f(e_1),f(e_2),...f(e_n))$ est orthonormée

$\Leftrightarrow \forall i,j\in[\![1,n]\!], f(e_i)\cdot f(e_j)=\delta_{i,j}$

$\Leftrightarrow \forall i,j\in[\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}=\delta_{i,j}$

$\Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$...

et $\forall i,j\in[\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}=\delta_{i,j} \Leftrightarrow {}^tAA=I_n$

$\Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1}={}^tA$

$\Leftrightarrow A{}^tA=I_n$

D'où le résultat.

Définition, proposition :

- Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$

A est orthogonale $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} {}^tAA=I_n \Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1}={}^tA$

- L'ensemble des matrices carrées et orthogonales, noté O_n (ou $O(n)$, ou $O_n(\mathbb{R})$), forme un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$

- Si B est une base orthonormale de E, si f est une application linéaire de E dans E, et si $A=\mathrm{mat}(f,\mathrm{B})$, alors $f\in O(E)\Leftrightarrow A\in O_n$

- B étant une base orthonormale de E, l'application $\phi: \begin{array}{l} O(E)\to O_n \\ f\mapsto \mathrm{mat}(f,\mathrm{B})\end{array}$ est un isomorphisme du groupe $(O(E),\circ)$ dans $(O_n,\times)$

En effet :

Déjà, ϕ est correctement définie, puisque pour $f \in O(E)$, $\text{mat}(f, \mathsf{B})$ est bien orthogonale.

- $\phi(f \circ g) = \text{mat}(f \circ g, \mathsf{B}) = \text{mat}(f, \mathsf{B}) \times \text{mat}(g, \mathsf{B}) = \phi(f) \times \phi(g)$
- $\phi(\text{Id}_E) = I_n$
- C'est surjectif d'après le tiret précédent : pour $A \in O_n$, on trouve $f \in O(E)$.
- C'est aussi injectif : $\ker \phi = \{\text{Id}\}$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O_n$$

C) Déterminant d'un automorphisme orthogonal

Proposition :

Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$

Si $A \in O_n$, alors $\det A = \pm 1$

Démonstration :

Si $A \in O_n$, on a alors :

${}^tAA = I_n$, donc $\det({}^tAA) = 1$, soit $\det({}^tA) \times \det(A) = 1$, d'où $\det(A)^2 = 1$

Si $f \in O(E)$: soit $A = \text{mat}(f, \mathsf{B})$, où B est une base orthonormale.

Alors $\det f = \det A = \pm 1$ car A est orthogonale.

Définition, proposition :

On note $SO(E)$ l'ensemble des éléments $f \in O(E)$ tels que $\det f = 1$

On note SO_n l'ensemble des $A \in O_n$ tels que $\det(A) = 1$.

Alors $SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial de E. Et SO_n est un sous-groupe de $(O_n, \times)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial d'ordre n (attention, SO_n n'est pas pour autant de cardinal n !)

Ces deux groupe sont isomorphes ; plus précisément, si B désigne une base orthonormale de E, l'application $\begin{array}{c} O(E) \to O_n \\ f \mapsto \text{mat}(f, \mathsf{B}) \end{array}$ définit, par restriction, un isomorphisme de $SO(E)$ vers SO_n.

(Remarque : $O(E) \setminus SO(E)$ n'est pas un sous-groupe, puisque si $\det f = -1$ et $\det g = -1$, alors $\det f \circ g = 1$!)

Exemple :

Soit f une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel quelconque F de E. (on note p la dimension de F).

Alors $f \in O(E)$ (puisque f conserve la norme)

On considère la matrice de f dans une base adaptée (le "début" dans F, le "reste" dans $F^\perp$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det f = (-1)^{n-p}$

Vocabulaire :

Un élément de $SO(E)$ est un automorphisme orthogonal direct / une isométrie vectorielle directe. (et indirect(e) pour les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$)

Ainsi :

- Les réflexions sont toujours indirectes ($n - p = 1$)
- Les symétries orthogonales par rapport à une droite (appelées aussi retournements) sont indirectes en dimension 2, directes en dimension 3.

Autre vocabulaire :

Les éléments de $SO(E)$ s'appellent aussi des rotations.

VI Orientation et changement de base

A) Orientation d'un R-ev *E* de dimension *n*.

Orienter *E*, c'est choisir une base B de *E*, décréter qu'elle est directe, et convenir qu'étant donnée une base B' de *E* :

B' est directe $\Leftrightarrow \det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}' > 0$

B' est indirecte $\Leftrightarrow \det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}' < 0$

Ainsi, étant données deux bases B' et B'' de *E*, B' et B'' sont de même sens (c'est-à-dire toutes les deux (in)directes) si et seulement si $\det_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}'' > 0$

En effet : $\det_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}'' = \det_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} \times \det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}'' = (\det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}')^{-1} \times \det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}''$, qui est positif si et seulement si les deux déterminants on même signe.

Exemples :

- En dimension 2 :

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe, alors $(\vec{j}, \vec{i})$ est indirecte, $(-\vec{j}, \vec{i})$ est directe, $(-\vec{i}, -\vec{j})$ aussi.

(Les déterminants sont « multipliés par -1 » lorsqu'on échange deux vecteurs)

- En dimension 3 :

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, alors $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ est directe, $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ est indirecte, et $(\vec{j}, \vec{i}, -\vec{k})$ directe.

On considère dorénavant *E* orienté.

Proposition :

Si $(u_1, u_2, \dots u_p)$ est une famille orthonormale de *E*, avec $p < n$, on peut la compléter en une base orthonormée directe de *E*.

Démonstration :

On sait construire $(u_1, u_2, \dots u_n)$ base orthonormale. Ainsi, soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$, soit $(u_1, u_2, \dots - u_n)$ sera directe.

B) Changement de base orthonormale

Proposition :

Soit $\mathrm{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de *E*.

Soit $\mathrm{B}' = (e'_1, e'_2, \dots e'_n)$ une autre base de *E*, et *P* la matrice de passage de B à B'.

Alors B' est orthonormale $\Leftrightarrow$ *P* est orthogonale.

Plus précisément :

B' est orthonormale de même sens que B $\Leftrightarrow P \in SO_n$

B' est orthonormale de sens contraire à B $\Leftrightarrow P \in O_n \setminus SO_n$.

Démonstration :

P donne les composantes de B' dans B, qui est orthonormale.

Donc, pour tout $i,j \in [\![1,n]\!], e'_i \cdot e'_j = C_i \cdot C_j$ (produit scalaire naturel des colonnes de P), et donc B' est orthonormale si et seulement si les colonnes de P forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. (Par ailleurs, $\det_{\mathrm{B}} \mathrm{B}' = \det P$, d'où le sens…)

Ainsi, si B est une base orthonormée directe et si B' est une autre base, P la matrice de passage de B à B', alors B' est une base orthonormée directe si et seulement si $P \in SO_n$

C) Automorphismes orthogonaux et orientation

Proposition :

Soit $f \in L(E)$, soit $\mathrm{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

On sait déjà que $f \in O(E) \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale.

On a, plus précisément :

$f \in SO(E) \Leftrightarrow (f(e_1), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de même sens que B.

$f \in O(E) \setminus SO(E) \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de sens opposé à B.

Démonstration :

Si $\mathrm{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$, alors $\det_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}') = \det f$.

D) Déterminant en base orthonormée directe

Proposition, définition :

Soit B une base orthonormée directe de E.

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\det_{\mathrm{B}}(u_1, u_2, \dots u_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe B, et s'appelle le produit mixte de $u_1, u_2, \dots u_n$, qu'on note $\det(u_1, u_2, \dots u_n)$ ou $[u_1, u_2, \dots u_n]$.

Démonstration :

Si B, B' sont deux bases orthonormées directes :

$$\det_{\mathrm{B}'}(u_1, u_2, \dots u_n) = \underbrace{\det_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}}_{\substack{=1 \text{ car } \mathrm{B},\mathrm{B}' \\ \text{sont deux bases} \\ \text{orthonormales} \\ \text{de même sens}}} \times \det_{\mathrm{B}}(u_1, u_2, \dots u_n)$$